



Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil servicii , tehnologic , științe ale naturii
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XI-a - barem de corectare

1.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 23035 & 23045 \\ 12015 & 12025 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23035 & 23035 \\ 12015 & 12015 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 23035 & 10 \\ 12015 & 10 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 23035 & 10 \\ 12015 & 10 \end{vmatrix} = 230350 - 120150 = 110200.$	2p 1p
1.b)	$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Calculul A^2 și A^3 și $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \cos n \frac{\pi}{3} & -\sin n \frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin n \frac{\pi}{3} & \cos n \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Inducție matematică pentru A^n</p> $A^{2015} = 2^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p 1p
2.a)	Prin calcul, $A \cdot {}^t A = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$	3p
2.b)	$A \cdot {}^t A = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}$ $\det(A \cdot {}^t A) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \geq 0.$	2p 2p



3.a)	$l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$	2p
3.b)	<p>Pentru $a = 1 \Rightarrow l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$</p> <p>Pentru $a = 2 \Rightarrow l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x - \cos x}{x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2).$ Similar,</p> <p>pentru $a = 3 \Rightarrow l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2)$</p> <p>Pentru</p> <p>$a = n \Rightarrow l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$</p> <p>Inducție matematică</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
4.	<p>$y = 2x + 1$ asimptotă oblică la $+\infty$, deci</p> <p>$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}}{x} = 2$ și</p> <p>$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((a-2)x + \sqrt{bx^2 + cx - 1} \right) = 1.$</p> <p>$y = -1$ asimptotă orizontală la $-\infty$, adică $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1} \right) = -1.$</p> <p>Din cele trei condiții se obține $a = b = 1, c = 2.$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.